

Das Potential zwischen Nukleonen

VON GERNOT EDER

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforschg. 9a, 565—572 [1954]; eingegangen am 17. April 1954)

Unter Voraussetzung der ladungssymmetrischen, pseudoskalaren Mesontheorie werden die nichtadiabatischen Korrekturen zur zweiten und vierten störungstheoretischen Näherung durch die Berücksichtigung der Nukleonengrößen berechnet. Es ergibt sich ein stark anziehendes Potential vierter Ordnung. Fragen der Spin-Bahn-Kopplung und der Absättigung der Kernkräfte werden behandelt.

Die Anwendung eines Störungsverfahrens bei der mesontheoretischen Berechnung des Potentials zwischen Nukleonen ist wegen der Größe der Nukleon-Pion-Kopplungskonstante eine Methode, deren Konvergenz zweifelhaft erscheint. Allerdings ist die Reichweite der Potentialanteile, welche durch den Austausch von n virtuellen Pionen entstehen, proportional n^{-1} . Die niederen Näherungen in der Kopplungskonstante f werden daher das Verhalten des Potentials für größere Entfernung gut wiedergeben; für kleine Abstände dominiert der Beitrag höherer Näherungen in f und der Anteil der schweren Mesonen. Levy¹ repräsentiert diese Beiträge durch einen phänomenologisch angenommenen Abstoßungsradius r_c , wobei das Potential für $r < r_c$ positiv unendlich sein soll. r_c wird dann so bestimmt, daß dadurch die niederen-energetischen Daten am besten befriedigt werden. Eine Schwierigkeit bei der Potentialberechnung für $r > r_c$ bilden jene Terme, bei denen m Pionen nicht ausgetauscht, sondern vom emittierenden Nukleon wieder absorbiert werden (Abb. 1). Diese Terme ergeben ein Potential, dessen Reichweite nur durch die Anzahl der ausgetauschten Pionen ($n-m$) bestimmt ist, obwohl es sich um einen Beitrag der Ordnung f^n handelt. Es werden also die größten Potentialbeiträge der Ordnung f^{n-m} mit neuen Konstanten zu multiplizieren sein. Wentzel² hat den Beitrag solcher Lambshift-Terme nach der Methode der starken Kopplung in einer statischen Näherung ($\bar{\psi} \psi(x) \rightarrow \sum_s \delta(x - x_s)$) berechnet. Da die Vernachlässigung der Nukleonengrößen die Beiträge der hochenergetischen virtuellen Pionen verfälscht, so werden bei ihm diese durch einen ad hoc eingeführten Grenzimpuls p_0

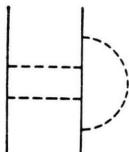


Abb. 1.
Lambshift-Term.

abgeschnitten. Dadurch wird z. B. der Zweipaarterm vierter Ordnung V_4^a [vgl. (2)] reduziert auf

$$V_4^a \left(1 + \frac{p_0}{M} \frac{f^2}{4\pi}\right)^{-2}$$

(M Nukleonmasse). Da Wentzel diesen Grenzimpuls in der Größenordnung von M annimmt, so würden dadurch die Beiträge der Zweipaarterme sehr stark verkleinert werden. Allerdings läßt eine Verallgemeinerung der im folgenden verwendeten Methode vermuten, daß die Berücksichtigung der Nukleonengrößen einen so starken Abfall der Beiträge höherer Impulse mit sich bringt, daß man $p_0 \ll M$ annehmen kann. Außerdem hat Jastrow³ gezeigt, daß die Deuterondaten gegen eine Variation von $V(\alpha, f) = V_2 + V_4$ nach α durch eine leichte Änderung von f unempfindlich gemacht werden können [$\alpha = 1 \rightarrow \alpha = 1/4$ entspricht $(f^2/4\pi) = 10 \rightarrow (f^2/4\pi) = 16$]. Aus diesen Gründen erscheint es doch wahrscheinlich, daß die erwähnten Übergänge keine zu großen Beiträge liefern. Wir werden uns daher im folgenden auf die von Klein⁴ behandelten Terme beschränken.

Das adiabatische Potential

Die störungstheoretische Berechnung des Potentials zwischen zwei Nukleonen wurde von Levy¹ bzw. Klein⁴ nach der Methode von Tamm und Dancoff bzw. Bethe und Salpeter in zweiter und vierter störungstheoretischer Näherung durchgeführt. Levy hat in adiabatischer Näherung, d. h. bei Vernachlässigung der Nukleonengrößen ein Potential gefunden, welches mit $(f^2/4\pi) = 10$ die Deuterondaten relativ gut befriedigt:

$$V_2(x)^{\text{ad}} = (\vec{\tau}_a \cdot \vec{\tau}_b) \left(\frac{f^2}{4\pi} \right) (m/2M)^2 m \quad (1)$$

$$\cdot \left\{ \frac{1}{3} (\vec{\sigma}_a \cdot \vec{\sigma}_b) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) S_{12} \right\} e^{-x/x},$$

¹ M. M. Levy, Phys. Rev. 88, 725 [1952].

² G. Wentzel, Phys. Rev. 86, 806 [1952].

³ R. Jastrow, Phys. Rev. 91, 749 [1953].

⁴ A. Klein, Phys. Rev. 90, 1101 [1953].



$$V_4^a(x)^{\text{ad}} = -3(f^2/4\pi)^2(m/2M)^2 m(2/\pi) K_1(2x)/x^2, \quad (2)$$

$$V_4^b(x)^{\text{ad}} = -3(f^2/4\pi)^2(m/2M)^3 m[(2/\pi) K_1(x)]^2/x^2, \quad (3)$$

wobei $x=mr$ und m die Pionmasse bedeutet. Die Beiträge V_4^a und V_4^b kommen von solchen Übergängen, bei welchen jedes Nukleon einen Zwischenzustand durchläuft. Dieses Levy'sche Potential wurde von Lüders⁵ und Klein⁴ korrigiert: Entwickelt man die Energienenner jener Terme, die V_4^a ergeben, so wird durch das erste Entwicklungsglied gerade V_4^b kompensiert; durch die Einpaarterme entsteht noch ein zusätzliches abstoßendes Potential:

$$V_4'(x) = 6(f^2/4\pi)^2(m/2M)^3 m(1+1/x)^2 e^{-2x}/x^2. \quad (4)$$

Berücksichtigt man noch das Potential, welches von solchen Übergängen herrührt, bei welchen keine Nukleonenpaare in den Zwischenzuständen vorhanden sind, so erhalten wir zusätzlich:

$$V_4''(x) = (f^2/4\pi)^2(m/2M)^4 m \cdot \left\{ (\vec{\tau}_a \cdot \vec{\tau}_b) U_\tau(x) + (\vec{\sigma}_a \cdot \vec{\sigma}_b) U_\sigma(x) + S_{12} U_T(x) \right\}, \quad (5)$$

wo U_τ , U_σ und U_T bei Nishijima⁶ und Klein⁴ gegeben sind (vgl. auch Brueckner und Watson⁷). Durch V_4' wird das Potential vierter Ordnung so stark verändert, daß es die Deuterondaten nicht mehr befriedigen kann.

Die Korrekturen der Levy'schen Potentiale durch Klein weisen allerdings die Schwierigkeit auf, daß sie auf einer fraglichen Entwicklung der Energienenner beruhen: So wird z. B. für den Energienenner $(2M+\omega_1)^{-1}$ $(2M+\omega_2)^{-1}$ die Entwicklung

$$(2M)^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\omega_1 + \omega_2}{2M} - \frac{\omega_1 \omega_2}{(2M)^2} \right)^n. \quad (6)$$

verwendet und nach dem ersten Glied abgebrochen ($\omega_i^2 = m^2 + \mathbf{k}_i^2$). (6) ist nur für $\omega_1 + \omega_2 + \omega_1 \omega_2 / 2M < 2M$ konvergent; da aber über den ganzen \mathbf{k}_1 - und \mathbf{k}_2 -Raum integriert wird, so erscheint die Verwendbarkeit von (6) sehr fraglich. So würde z. B. das Entwicklungsglied $\sim (2M)^{-5} (\omega_1 + \omega_2) \omega_1 \omega_2$ ein Potential der Form $3f^4(m/2M)^5 m [\delta(mr)]^2$ liefern, während die höheren Glieder noch stärker divergieren. Mit einer Entwicklung des Integranden nach Potenzen von $(k/2M)$ fällt auch die Möglichkeit, das

adiabatische Potential als eine Potenzreihe nach $(m/2M)$ darzustellen. Auf einer analogen Entwicklung beruhen die Potentialkorrekturen von Sato⁸. Wir glauben also, daß die Kleinschen Korrekturen in ihrer bisherigen Form nicht gerechtfertigt werden können und unternehmen im folgenden eine Neuberechnung dieser Potentiale unter wesentlich genauerer Berücksichtigung der Nukleonentrückstöße.

Das nichtadiabatische Potential

Die einzeitige Bethe-Salpeter-Gleichung führt für die Wellenfunktion $\psi(\mathbf{r})$ zweier Nukleonen a und b ($\mathbf{r} = \mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a$) auf eine Gleichung der Form⁴:

$$\left(\frac{1}{2M^*} \Delta + \varepsilon \right) \psi(\mathbf{r}) = \int d^3 \mathbf{r}' V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}'), \quad (7)$$

wo $M^* = M_a M_b / (M_a + M_b)$ und $\varepsilon = W - 2M$ die Bindungsenergie bedeuten. Das nichtlokale Potential $V(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ist in zweiter Ordnung ($\sim f^2$) gegeben durch

$$V_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -f^2 \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^3} \cdot e^{i(\mathbf{p}\mathbf{r} - \mathbf{p}'\mathbf{r}')} \cdot \langle \mathbf{p}, -\mathbf{p} | \frac{(\beta\gamma_5 \tau_i)^a \beta\gamma_5 - \tau_i)^b}{\omega_{pp'} (\omega_p - p' + E_p + E_{p'} - W)} | \mathbf{p}', -\mathbf{p}' \rangle \quad (8)$$

$E_p^2 = M + p^2$. Levy und Klein erhalten aus (8) ein lokales Potential, indem sie $E_p = E_{p'} = M$, $W = 2M$ setzen. Diese Näherung führt aber zu einem falschen Ergebnis, da der Integrand von (8) über den ganzen Raum von \mathbf{p} und \mathbf{p}' integriert wird. Es soll nun im folgenden gezeigt werden, daß dieser Fehler wohl für $mr \gg 1$ keine Rolle mehr spielt, sich aber bereits stark auswirkt für Entfernung $mr \approx 1$, welche für das Deuteron entscheidend sind.

Entwickeln wir $\psi(\mathbf{r}')$ in der Form

$$\psi(\mathbf{r}') = \psi(\mathbf{r}) + (\mathbf{r}' - \mathbf{r}, \Delta\psi) + \dots \quad (9)$$

und setzen dies in (7) ein, so ergibt das erste Glied von (9) ein statisches Potential; die höheren Glieder geben wegen $-i\Delta\psi = \mathbf{p}\psi$ geschwindigkeitsabhängige Potentiale (unter anderem eine Spin-Bahn-Kopplung). Wir interessieren uns zunächst nur für das statische Potential: Setzen wir das erste Glied von (9) in (7) ein, so folgt in zweiter Störungstheoretischer Näherung:

$$\left(\frac{1}{2M^*} \Delta + \varepsilon \right) \psi(\mathbf{r}) = V_2(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}), \quad (10)$$

⁵ G. Lüders, Unveröff. Ber. d. Theor. Studiengruppe des Europ. Rats f. kernphys. Forschung (CERN), Kopenhagen, Dez. 1952.

⁶ K. Nishijima, Progr. Theor. Phys. **6**, 911 [1951].

⁷ K. A. Brueckner u. K. M. Watson, Phys. Rev. **92**, 1023 [1953].

⁸ I. Sato, Progr. Theor. Phys. **10**, 323 [1953].

$$\text{wo } V_2(r) = \int d^3r' V_2(r, r') \\ = - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{ipr} \langle p, -p | \dots | 0, 0 \rangle.$$

Mit $\langle \pm p | \beta \gamma_5 | 0 \rangle = \pm [2E_p(M + E_p)]^{-1/2} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})$ wird

$$V_2(r) = (f/2M)^2 (\vec{\tau}_a \cdot \vec{\tau}_b) (\vec{\sigma}_a \cdot \Delta) (\vec{\sigma}_b \cdot \Delta) Y(r), \quad (11)$$

$$\text{wo } Y(r) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{ipr}}{\omega_p^2} \varphi(p); \quad (12)$$

dabei ist

$$\varphi(p) = 2M^2 \left\{ E_p(M + E_p) \left(1 + \frac{E_p - M - \varepsilon}{\omega_p} \right) \right\}^{-1}.$$

In adiabatischer Näherung wird $\varphi(p)^{\text{ad}} = 1$ gesetzt, während das exakte $\varphi(p)$ ungefähr wie

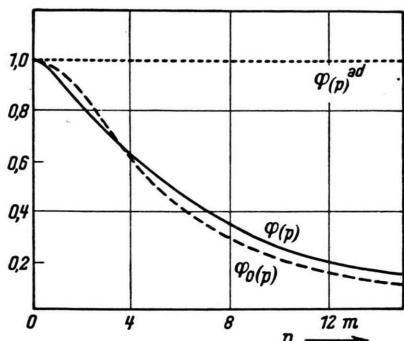


Abb. 2. Der Einfluß der Nukleonenerückstöße beim Potential 2. Ordnung.

$$V_4^a(r) = -\frac{3}{4} f^4 \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} \frac{e^{i(k_1+k_2)r}}{\omega_1 \omega_2} \left\{ \frac{\langle k_1 + k_2 | \beta \gamma_1 A(k_2) \beta \gamma_5 | 0 \rangle^a}{(\omega_1 + \omega_2 + E_{12} - M - \varepsilon)(M + E_{12} + \omega_2)} \cdot \right. \\ \left. \cdot \left[\frac{\langle -k_1 - k_2 | \beta \gamma_5 A(-k_2) \beta \gamma_5 | 0 \rangle^b}{E_{12} + E_2 + \omega_1} + \frac{\langle -k_1 - k_2 | \beta \gamma_5 A(-k_1) \beta \gamma_5 | 0 \rangle^b}{E_{12} + E_1 + \omega_2} \right] + 1 \right\} = \\ = -3 \left(\frac{f^2}{4\pi^2 Mr} \right)^2 \int_0^\infty dk_1 \int_0^\infty dk_2 \omega_1^{-1} \omega_2^{-1} \varphi(k_1, k_2; \bar{E}_{12}) \sin(k_1 r) \sin(k_2 r) k_1 k_2, \quad (16)$$

$$\text{wo } \varphi(k_1, k_2; \bar{E}_{12}) = \frac{M^2}{8} \cdot \frac{(1 + M/\bar{E}_{12})(1 + M/E_2)}{(\omega_1 + \omega_2 + \bar{E}_{12} - M - \varepsilon)(M + \bar{E}_{12} + \omega_2)} \left(\frac{1 + M/E_2}{\bar{E}_{12} + E_2 + \omega_1} + \frac{1 + M/E_1}{\bar{E}_{12} + E_1 + \omega_2} \right) + 1 \geq 2,$$

$$E_i = \sqrt{[M^2 + k_i^2]^{1/2}}, \quad E_{12} = \sqrt{[M^2 + (k_1 + k_2)^2]^{1/2}}.$$

\bar{E}_{12} ist ein Mittelwert von E_{12} zwischen dem Maximalwert $E_m = \sqrt{[M^2 + (|k_1| + |k_2|)^2]^{1/2}}$ und dem Minimalwert M . Dieser Mittelwert wird eingeführt, um komplizierte Winkelintegrationen zu vermeiden. Im adiabatischen Grenzfall wird

$$\varphi(k_1, k_2)^{\text{ad}} = (\omega_1 + \omega_2)^{-1}.$$

$$\varphi_0(p) = 25 m^2 (25 m^2 + p^2)^{-1} \quad (13)$$

verläuft (Abb. 2). Setzen wir (13) in (12) und (12) in (11) ein, so erhalten wir:

$$V_2(x) = \frac{25}{24} \left(\frac{f^2}{4\pi} \right) \left(\frac{m}{2M} \right)^2 m (\vec{\tau}_a \cdot \vec{\tau}_b) \\ \cdot \left[\frac{1}{3} (\vec{\sigma}_a \cdot \vec{\sigma}_b) (1 - 25 e^{-4x}) + \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{25}{3} + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} \right) e^{-4x} \right] S_{12} \right] \frac{e^{-x}}{x}. \quad (14)$$

Das Kontaktpotential $\sim \delta(r)$ fällt weg.

Für den 3S -Zustand folgt aus (14) mit $(f^2/4\pi) = 10$ und $m = 141$ MeV:

$$V_2(x, ^3S) = -8,18 \text{ MeV} \left\{ 1 - 25 e^{-4x} + \left[1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} \right. \right. \\ \left. \left. - \left(25 + \frac{15}{x} + \frac{3}{x^2} \right) e^{-4x} \right] S_{12} \right\} \frac{e^{-x}}{x}. \quad (15)$$

Die Zentralkraft wird also für $mr < 0,8$ abstoßend, während die Tensorkraft immer negativ bleibt; doch wird ihr Betrag für kleine Radien stark heruntergedrückt (für $x = mr = 0,4$ beträgt sie 42% ihres adiabatischen Wertes). Für $mr \gg 1$ erhalten wir die adiabatische Näherung (1).

Die Potentialbeiträge vierter Ordnung unterscheiden wir entsprechend ihren Zwischenzuständen in Zweipaar-, Einpaar- und in solche Terme, welche keine virtuellen Paare enthalten. Die Zweipaarterme liefern das Potential V_4^a und V_4^b . Es ist

Am Rande des Integrationsbereiches ($k_1 = 0$ bzw. $k_2 = 0$) ist $E_{12} = E_2$ bzw. E_1 , $\varphi(0, k) = \varphi(k, 0)$ daher eindeutig bestimmt (Abb. 3). Je weiter wir uns aber der Geraden $k_1 = k_2 = k$ nähern, desto größer ist der Bereich, in dem E_{12} liegen kann. Allerdings weicht sogar $\varphi(k, k; E_m)$ nicht zu stark von $\varphi(k, k; M)$ ab (Abb. 4), so daß wir einen guten Näherungsaus-

druck $\varphi_0(k_1, k_2)$ erhalten, wenn wir diesen so wählen, daß $\varphi_0(k, 0) = \varphi_0(0, k) \approx \varphi(k, 0) = \varphi(0, k)$ und daß $\varphi_0(k, k)$ zwischen $\varphi(K, k; E_m)$ und $\varphi(k, k; M)$ liegt (Abb. 3) und (Abb. 4).

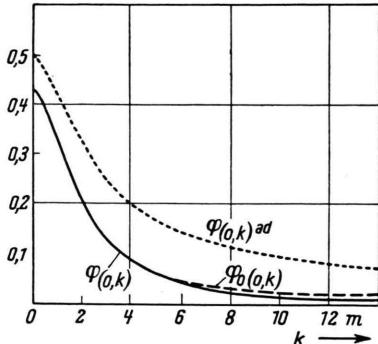


Abb. 3. Der Einfluß der Nukleonentrückstöße bei V_4^a am Rand des Integrationsgebietes.

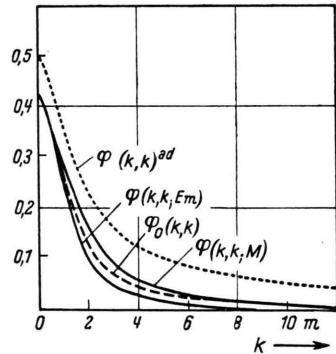


Abb. 4. Der Einfluß der Nukleonentrückstöße bei V_4^a für $k_1 = k_2 = k$.

Dabei gilt:

$$\varphi_0(k_1, k_2) = \frac{0,0966}{\omega_1 + \omega_2} + \frac{2,201}{(\omega_1 + \omega_2)^2} - \frac{0,0383}{\omega_1 \omega_2} - \frac{0,128}{\omega_1^2 \omega_2^2}. \quad (17)$$

(17) gibt in (16) eingesetzt:

$$V_4^a(x) = -3 \left(\frac{f^2}{4 \pi} \frac{m}{2M} \right)^2 m \quad (18)$$

$$\begin{aligned} &\cdot \left[\left[0,0966 \frac{2}{\pi} K_1(2x) - 0,0383 e^{-2x} \right] x^{-2} \right. \\ &\left. + 1,101 \left[\frac{2}{\pi} K_1(x) \right]^2 - 1,128 \left[\frac{2}{\pi} K_0(x) \right]^2 \right]. \end{aligned}$$

V_4^a steigt von 47% bei $x = 0,4$ auf 137% seines adiabatischen Wertes (2) bei $x = 1,8$.

Entsprechend gilt:

$$V_4^b(x) = -3 \left(\frac{f^2}{4 \pi^2 M r} \right)^2 \quad (19)$$

$$\cdot \int_0^\infty dk_1 \int_0^\infty dk_2 \frac{k_1 k_2}{\omega_1 \omega_2} \varphi(k_1, k_2) \sin(k_1 r) \sin(k_2 r),$$

$$\text{wo } \varphi(k_1, k_2) = \frac{M^3}{2} \frac{(1 + M\bar{E}_{12})(1 + M/E_2)}{(\bar{E}_{12} + E_2 + \omega_1)(E_2 + M + \omega_2)}$$

$$\cdot \left\{ \frac{1 + M/E_2}{W + 2E_2} + \frac{1 + M/E_1}{W + E_1 + E_2 + \omega_1 + \omega_2} \right\} + 1 \rightleftharpoons 2.$$

Gehen wir genau so wie bei V_4^a vor, so erhalten wir mit

$$\varphi(k_1, k_2) \approx \varphi_0(k_1, k_2)$$

$$= \frac{4,755 \omega_1 \omega_2 m^2}{(3m^2 + k_1^2)(3m^2 + k_2^2)} + \frac{0,6145 m}{\omega_1 + \omega_2}, \quad (20)$$

$$(\varphi(k_1, k_2)^{\text{ad}} = 1):$$

$$V_4^b(x) = -3 \left(f^2 / 4 \pi \right)^2 (m/2M)^3 m \quad (21)$$

$$\cdot \{ 4,755 e^{-2\sqrt{3}x} + 0,6145 (2/\pi) k_1 (2x) \} / x^2.$$

$V_4^b(x)$ steigt von 79% seines adiabatischen Wertes bei $x = 0,4$ auf 129% bei $x = 1,8$.

Der Beitrag der Einpaarterme lautet:

$$V_4'(x) = -6 f^4 (2M)^{-3} \quad (22)$$

$$\cdot \int \frac{d^3 \mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \mathbf{k}_2}{(2\pi)^3} \cdot \frac{e^{i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)\mathbf{r}}}{\omega_1^2 \omega_2^2} \varphi(k_1, k_2)(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2).$$

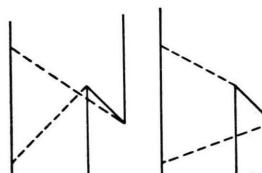


Abb. 5.
Einpaar-Übergänge.

In adiabatischer Näherung gilt $\varphi(k_1, k_2)^{\text{ad}} = 1$. Um den Einfluß der Nukleonentrückstöße den Einpaartermen abzuschätzen, beschränken wir uns der Einfachheit halber auf Graphen der Form Abb. 5.

Damit ergibt sich

$$\varphi(k_1, k_2) = \frac{M^3}{2 E_{12}} \left\{ \frac{E_2 + M}{2 E_2} \left[\left(E_1 \left(1 + \frac{E_1 - M}{\omega_1} \right) \right. \right. \right. \\ \left. \cdot \left(1 + \frac{E_1 + E_{12} - 2M}{\omega_2} \right) (E_1 + E_2 + E_{12} - M) \right]^{-1} \\ + \left(E_2 \left(1 + \frac{E_2 + E_{12} - 2M}{\omega_1} \right) \left(1 + \frac{E_2 - M}{\omega_2} \right) \right. \\ \left. \cdot (2E_2 + E_{12} - M) \right]^{-1} \left. \right] + 1 \right\rangle 2 \right\}$$

(es wurde $W = 2M$ gesetzt). Die numerische Durchrechnung zeigt, daß man mit einer Genauigkeit von ca. 5% für φ den Näherungsausdruck

$$\varphi_0(k_1, k_2) = 81 m^4 / [(9m^2 + k_1^2)(9m^2 + k_2^2)] \quad (23)$$

verwenden kann. (22) gibt dann mit (23):

$$V_4'(x) = \varphi(x) V_4'(x)^{\text{ad}}, \quad (24)$$

$$\text{wo } \varphi(x) = (81/64) [1 + (3x + 1)/(x + 1) \cdot e^{-2x}]^2. \quad (25)$$

$\varphi(x)$ steigt von 11% bei $x = 0,4$ auf 111% bei $x = 1,8$. Durch $\varphi(x)$ (25) wird der Beitrag des abstoßenden Potentials V_4' wesentlich heruntergedrückt. Der Ein-

fluß der Energienenner ist also für V_2 und V_4' viel größer als für V_4^a und V_4^b . Dies röhrt daher, daß die Zähler der Integranden von V_2 bzw. V_4' proportional $(\vec{\sigma}_a \cdot \vec{f})(\vec{\sigma}_b \cdot \vec{f})$ bzw. $(\vec{f}_1 \cdot \vec{f}_2)$ sind, also erst für große \vec{f} einen entscheidenden Beitrag liefern. Für großes \vec{f} ist aber auch der Einfluß der Energienenner groß.

Diese Reduktion der Potentialbeiträge durch die Energienenner ist besonders groß bei den Beiträgen jener Übergänge, welche in den Zwischenzuständen keine Nukleonpaare enthalten. Betrachten wir z. B. den Zentralkraftanteil der Übergänge, Abb. 6, so lautet der entsprechende Potentialbeitrag

$$V''(x) = -\frac{3 f^4}{(2M)^4} \int \frac{d^3 \vec{f}_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \vec{f}_2}{(2\pi)^3} \frac{e^{i(\vec{f}_1 + \vec{f}_2) \cdot \vec{r}}}{\omega_1^2 \omega_2^2} (\vec{f}_1 \cdot \vec{f}_2)^2 \varphi(k_1, k_2), \quad (26)$$

wo $\varphi(k_1, k_2) = 2M^3$

$$\begin{aligned} & \cdot \{E_{12}(E_{12}+M)[1+(E_{12}+E_2-2M)/\omega_1] \\ & \cdot (\omega_1 + \omega_2 + E_{12} - M) E_2\}^{-1} \\ & \cdot \{(M/E_2)[1+(E_2-M)/\omega_2] \\ & + \omega_2(M/E_1)/(\omega_1 + E_1 - M)\}. \end{aligned}$$

$\varphi(k_1, k_2)^{\text{ad}} = \omega_1^{-1}$. Mit $\varphi_0(k_1, k_2) = 1,96 \cdot 3,24 \text{ m}^3 \cdot (1,96 \text{ m}^2 + k_1^2)^{-1} (3,24 \text{ m}^2 + k^2)^{-1}$ wird (26):

$$\begin{aligned} V''(x) &= (27) \\ & - 3(f^2/4\pi)^2 (m/2M)^4 m (1,96 \cdot 3,24 / 0,96 \cdot 2,24) x^{-6} \\ & \cdot \{[x^2 + 2x + 2] e^{-x} - [(1,8x)^2 + 2(1,8x) + 2] e^{-1,8x}\} \\ & \cdot \{[x^2 + 2x + 2] e^{-x} - [(1,4x)^2 + 2(1,4x) + 2] e^{-1,4x}\}, \end{aligned}$$

während die adiabatische Näherung

$$\begin{aligned} V''(x)^{\text{ad}} &= -3(f^2/4\pi)^2 (m/2M)^4 m (2/\pi) \\ & \cdot [x k_0(x) + k_1(x)] (x^2 + 2x + 2) e^{-x} / x^4 \quad (28) \end{aligned}$$

ergibt. Die nichtadiabatischen Korrekturen ergeben nach (27) für $x=0,4$ eine Reduktion auf 0,7% des adiabatischen Wertes (28); für $x=1,8$ beträgt die Reduktion noch 60%. Für $(f^2/4\pi)=10$ steigt (27) von $-1,3$ MeV bei $x=0,4$ auf $-0,03$ MeV bei $x=1,8$. $V_4''(x)$ kann daher vernachlässigt werden.

Bei den Beiträgen sechster Ordnung ist die Reduktion durch die Nukleonrückstöße ebenfalls sehr groß. Der Hauptterm lautet:

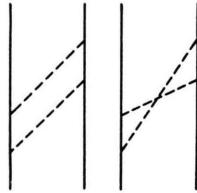


Abb. 6. Übergänge ohne Paare.

$$\begin{aligned} V_6(x) &= -4(f^2/4\pi)^3 (2M)^{-4} (\vec{\tau}_a \cdot \vec{\tau}_b) (2\pi^2)^{-3} \\ & \cdot \int d^3 \vec{f}_1 d^3 \vec{f}_2 d^3 \vec{f}_3 (\omega_1 \omega_2 \omega_3)^{-2} \\ & \cdot e^{i(\vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3) \cdot \vec{r}} \cdot \varphi(k_1, k_2, k_3) \cdot (\vec{\sigma}_a \cdot \vec{f}_1) (\vec{\sigma}_b \cdot \vec{f}_2). \end{aligned} \quad (29)$$

Setzt man $\varphi = \varphi^{\text{ad}} = 1$, so wird nach Klein:

$$\begin{aligned} V_6(x)^{\text{ad}} &= \frac{4}{3} (f^2/4\pi)^3 (m/2M)^4 m (\vec{\tau}_a \cdot \vec{\tau}_b) \\ & \cdot [(\vec{\sigma}_a \cdot \vec{\sigma}_b) + S_{12}] \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 e^{-3x/x^3}. \end{aligned} \quad (30)$$

Um den Einfluß der Nukleonrückstöße abzuschätzen, betrachten wir den Graphen Abb. 7. Für diesen Übergang lautet φ :

$$\begin{aligned} \varphi(k_1, k_2, k_3) &= M^2 (1 + M/E_1) (1 + M/\bar{E}_{13}) (1 + M/\bar{E}_{23}) \\ & \cdot \{4E_3 \bar{E}_{123} [1 + (E_3 + \bar{E}_{13} - 2M)/\omega_1] \\ & \cdot [1 + (\bar{E}_{123} + \bar{E}_{13} - 2M)/\omega_2] [1 + (E_3 - M)/\omega_2] \\ & \cdot [(E_3 + \bar{E}_{13} + \bar{E}_{123} + \bar{E}_{23})/(2M) - 1] \\ & \cdot [(E_1 + E_3 + \bar{E}_{13})/M - 1]\}^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{wo } \bar{E}_{12} &= +[M^2 + (\bar{k}_1 + \bar{k}_2)^2]^{1/2} \text{ usw.,} \\ \bar{E}_{123} &= +[M^2 + (\bar{k}_1 + \bar{k}_2 + \bar{k}_3)^2]^{1/2}. \end{aligned}$$

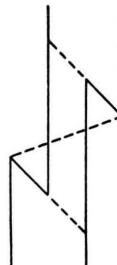


Abb. 7. Übergang sechster Ordnung.

Da φ nur schwach von k_2 abhängt, können wir diese Abhängigkeit vernachlässigen. Für

$\varphi(k_1, k_3) = \varphi(k_1, 0, k_3)$ gehen wir beim Potential vierten Ordnung vor und erhalten als Näherungsausdruck für φ :

$$\begin{aligned} q_0(k_1, k_2, k_3) &= 2,89 m^2 \cdot 1,69 m^2 (2,89 m^2 + k_1^2)^{-1} \\ & \cdot (1,69 m^2 + k_3^2)^{-1}. \end{aligned} \quad (31)$$

Setzen wir (31) in (29) ein, so erhalten wir:

$$V_6(x) = \varphi(x) V_6^{\text{ad}}(x), \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \text{wo } \varphi(x) &= 3,745 [1 - e^{-0,7x} (1 + 1,7x)/(1 + x)] \\ & \cdot [1 - e^{-0,3x}]. \end{aligned} \quad (33)$$

$\varphi(x)$ steigt von 0,04 bei $x=0,4$ auf 0,92 bei $x=1,8$. Für $(f^2/4\pi)=10$ steigt $V_6(^1S)$ von $-61,4$ MeV für $x=0,4$ auf $-0,03$ MeV bei $x=1,8$. Da die Berücksichtigung der Nukleonrückstöße desto schwieriger wird, je mehr virtuelle Mesonen ausgetauscht werden, so wollen wir mit dem Potential sechster Ordnung diese Berechnungen abschließen. Addieren wir die Potentialbeiträge vierten Ordnung, so wird $V_4 = V_4^a + V_4^b + V_4'$ ungefähr halb so groß wie das entsprechende Potential von Levy ($V_4^a \text{ ad} + V_4^b \text{ ad}$). Dies spricht dafür, daß $(f^2/4\pi) \approx 10\sqrt{2} \approx 14$ ange-

nommen werden muß. Abb. 8 und 9 zeigen den Verlauf der Zentral- und Tensorkraft in *S*-Zuständen, wie er sich aus $V_2 + V_4 + V_6$ ergibt, für $(f^2/4\pi) = 14$. Das Potential von Levy mit $(f^2/4\pi) = 10$ ist zum Vergleich angegeben.

Absättigung und Mehrkörperkräfte

Wir untersuchen jetzt die Frage, ob man die Massendefekte der schwereren Atomkerne mit den von den π -Mesonen herrührenden Kräften allein —

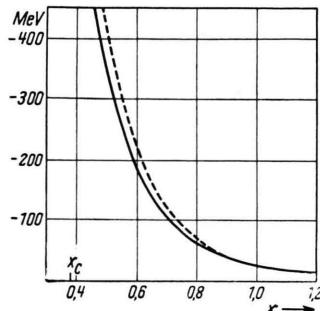


Abb. 8. Potential der Zentralkraft in *S*-Zuständen für Proton-Neutron-Wechselwirkung.
— $(f^2/4\pi) = 14$; - - - Levy mit $(f^2/4\pi) = 10$.

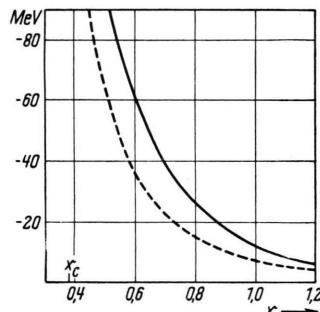


Abb. 9. Potential der Tensorkraft in *S*-Zuständen.
— $(f^2/4\pi) = 14$; - - - Levy mit $(f^2/4\pi) = 10$.

unter ganz summarischer Berücksichtigung der schwereren Mesonen durch den Grenzradius r_c — deuten kann. Die Tatsache, daß die Absättigung der Kernkräfte nicht durch die Austauschwirkung der Zweikörperkräfte erklärt werden kann, weist auf den Einfluß von Mehrkörperkräften hin. Drell und Huang⁹ haben den Einfluß der Mehrkörperkräfte berechnet, wobei sie sich bei der *n*-Körperkraft auf jene Beiträge 2*n*-ter Ordnung in *f* beschränken, welche die meisten Nukleonenpaare enthalten. Für

⁹ S. D. Drell u. K. Huang, Phys. Rev. 91, 1527 [1953].

die Zweikörperkraft setzen sie das Potential V_4^a ad mit der Levyschen Kopplungskonstante $(f^2/4\pi) = 10$ als richtig voraus. Es soll nun untersucht werden, wie sich die Absättigungsverhältnisse für unsere modifizierten Zweikörperpotentiale ändern.

Nehmen wir für unser Potential wieder einen Abstoßungsradius r_c an, dann ergibt der Erwartungswert des Zweikörperpotentials⁹:

$$\langle V^{2K} \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^A \int dr_1 dr_2 \varphi_i^*(1) \varphi_j^*(2) V(12) \cdot \begin{vmatrix} \varphi_i(1) & \varphi_i(2) \\ \varphi_j(1) & \varphi_j(2) \end{vmatrix} f^2(r_{12}),$$

wo $f(r) = 1$ bzw. 0 für $r >$ bzw. $< r_c$. Die Funktionen $\varphi_i(j)$ werden durch ebene Wellen im Kernvolumen v approximiert.

Um den Erwartungswert des Potentials als Funktion der Kerndichte ϱ zu schreiben, führen wir die Größe $\zeta = \varrho/\varrho_0$ ein, wobei wir als Bezugsdichte ϱ_0 die empirische Kerndichte $\varrho_0 = (3 m^3/4\pi)$ wählen. Wird für den Maximalimpuls der Fermi-Kugel die Beziehung $k_m = 1,52 m \zeta^{1/3}$ verwendet, so erhält man schließlich als Erwartungswert des Zweikörperpotentials pro Nukleon:

$$\langle V^{2K} \rangle / A = (3/2) \zeta \int_{x_c}^{\infty} dx x^2 V_z^{2K}(x) + (27 \zeta^{1/3}/8 \cdot 1,52^2) \cdot \int_{x_c}^{\infty} dx [-V_z^{2K} + 3V_a^{2K}] (j_1(1,52 \zeta^{1/3} x))^2, \quad (34)$$

wobei das Zentral- und das Austauschpotential durch $V_z^{2K} = V_4^a + V_4^b + V_4'$ und $V_a^{2K} = V_2 + V_6$ für den 1S -Zustand gegeben sind. Der zweite Summand in (34) stellt den Austauschterm dar. (34) gibt für $(f^2/4\pi) = 14$:

$$\langle V^{2K} \rangle / A = -66,3 \text{ MeV } \zeta + a(\zeta) \quad (35)$$

mit $a(1) = 12,1$ MeV. Der Austauscheffekt beträgt also 18% für $\zeta = 1$ (Drell und Huang erhalten für ihr Potential 19% bei $\zeta = 1$).

Die Erwartungswerte der *n*-Körperkräfte lassen sich für $n \geq 3$ aufsummieren zu

$$W(\zeta) = \sum_{n=3}^{\infty} \langle V^{nK} \rangle / A. \quad (36)$$

Bei Vernachlässigung von Austausch- und Rückstoßeffekten erhalten Drell und Huang:

$$W(\zeta) = (m/16\pi) [(1 + \gamma^2) \ln(1 + \gamma) - \gamma - 1,5\gamma^2] \quad \text{für } \zeta \gg 1, \quad (37)$$

wo $\gamma = 6(f^2/4\pi)(m/2M)\zeta = 6,3\zeta$ für $(f^2/4\pi) = 14$.

(Die Vernachlässigung der Austauschterme ist für $\zeta \gg 1$ zulässig, da der Anteil der Austauschterme für große Dichten sehr klein ist.)

Die kinetische Energie pro Nukleon beträgt für Kerne, die in den Proton- und Neutronzahlen symmetrisch sind:

$$E_{\text{kin}}/A = E_F (\zeta^{2/3} + 0,82 \zeta), \quad (38)$$

wo die Fermi-Energie E_F durch

$$E_F = (3m^3/40M) (9\pi)^{2/3} = 14,7 \text{ MeV}$$

gegeben ist.

Die Energie pro Nukleon ergibt sich durch Addition von (35), (38) und dem Mehrkörperpotential (36), das für $\zeta \gg 1$ durch (37) gegeben ist. (Es handelt sich dabei um die Volumsenergie pro Nukleon, da die Oberflächen- und Coulomb-Energie hier nicht in Betracht gezogen wurde.)

Zusammenfassend lässt sich folgendes sagen: Der starke Anstieg von (37) für $\zeta < 1$ hindert den Kern am Zusammenstürzen. Ob die Energie pro Nukleon für $\zeta = 1$ ein Minimum hat, lässt sich schwer entscheiden. Sollen (35), (36) und (38) die experimentelle Volumsenergie pro Nukleon richtig wiedergeben, dann müssen für $\zeta = 1$ die Austausch- und Nukleonenrückstoßeffekte den Beitrag von (37) auf 16% seines „klassischen“ Wertes reduzieren. Das ist ein Wert, der nach den Berechnungen von Dreißig und Huang über die Austauscheffekte bei der Dreikörperkraft und nach den Berechnungen in dieser Arbeit über Nukleonenrückstoßeffekte vernünftig erscheint.

Spin-Bahn-Kopplung

Einen Spin-Bahn-Beitrag erhält man von Übergängen, bei welchen ein Zwischenzustand negativer

Energie durchlaufen wird. Dadurch ergeben sich Übergangselemente folgender Art:

$$\begin{aligned} & < p_1 | \beta \gamma_5 A \cdot (p_1 - k_1) \beta \gamma_5 | p_1 - k_1 + k_2 > \\ & = 1 + (2M)^{-2} \vec{\sigma} \cdot i (k_1 + k_2) \times p. \quad (39) \end{aligned}$$

Das Potential zweiter Ordnung enthält keine solchen Terme. Bei den Beiträgen vierter Ordnung kommen sie in den Zwei- und Einpaartermen vor. Die Berücksichtigung von Spin-Bahn-Beiträgen bedeutet also, daß wir die Integranden von V_4^a , V_4^b und V_4' mit (39) zu multiplizieren haben. Die Berücksichtigung des zweiten Termes von (9) liefert:

$$V_4 \psi \rightarrow V_4 \psi + (2M)^{-2} \text{grad } V_{\text{Sp. B.}}^4 \times p \cdot \vec{\sigma} \psi, \quad (40)$$

$$\text{wo } V_4 = V_4^a + V_4^b + V_4', V_{\text{Sp. B.}}^4 = 2(V_4^a + V_4^b) + V_4'.$$

Wir erhalten also einen Spin-Bahn-Beitrag

$$(4M^2 r)^{-1} (d/dr) V_{\text{Sp. B.}}^4 (\vec{l}_a \cdot \vec{S}_a + \vec{l}_b \cdot \vec{S}_b), \quad (41)$$

wo $\vec{S} = 1/2 \vec{\sigma}$, $\vec{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Da nun $V_{\text{Sp. B.}}^4$ mit r monoton wächst, liefert das Potential vierter Ordnung einen Spin-Bahn-Beitrag mit positivem Vorzeichen,

das jedoch den Ergebnissen der Kernspektroskopie widerspricht. Kommt der Ausdruck (39) in einem anziehenden bzw. abstoßenden Potential vor, so erhält der Spin-Bahn-Beitrag ein positives bzw. negatives Vorzeichen. Ein abstoßendes Potential liegt aber im Falle der Dreikörperkraft vor, die nach den Überlegungen des vorangehenden Abschnittes nicht zu vernachlässigen ist. Der Hauptterm (vgl. Abb. 10) enthält nur Übergänge der gewünschten Form:

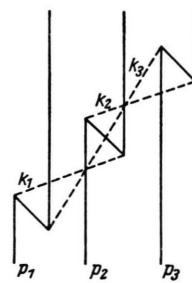


Abb. 10. Graph zur Dreikörperkraft.

$$V^{3K}(r_{12}, r_{23}, r_{13}) = (f^2/2M)^3 6 (2\pi)^{-9} \int d^3 k_1 d^3 k_2 d^3 k_3 (\omega_1 \omega_2 \omega_3)^{-1} \{ [(\omega_1 + \omega_3)(\omega_2 + \omega_3)]^{-1} + \text{zykl.} \} \cdot M_1 M_2 M_3 \exp(i k_1 r_{12} + \text{zykl.}), \quad (42)$$

$$\text{wo } M_1 = < p_1 | \beta \gamma_5 A \cdot (p_1 - k_1) \beta \gamma_5 | p_1 - k_1 + k_2 > = 1 + i (2M)^{-2} [k_1 - k_3, p_1] \cdot \vec{\sigma}_1 + \dots, \text{zykl.} \quad (43)$$

$$\text{Vernachlässigen wir Beiträge } \sim (2M)^{-7}, \text{ so gibt (42): } V_z^{3K} + (2M)^{-2} \{ [(\nabla_{12} + \nabla_{13}) V_z^{3K}, p_1] \cdot \vec{\sigma}_1 + \text{zykl.} \},$$

$$\text{wo } V_z^{3K}(x_{12}, x_{23}, x_{13}) = 12 (f^2/4\pi)^3 (m/2M)^3 m (2/\pi) K_1(x_{12} + x_{23} + x_{13}) / (x_{12} x_{23} x_{13}).$$

Um etwas über die Größe dieses Spin-Bahn-Beitrages zu erfahren, betrachten wir den Erwartungswert der Spin-Bahn-Wechselwirkungsenergie eines Nukleons (Index k) mit einem g-g-Rumpf:

$$< V_{\text{Sp. B.}}^{3K} > = (1/6) \sum_{i,j=1}^A \int dr_1 dr_2 dr_3 \varphi_i^*(1) \varphi_j^*(2) \varphi_k^*(3) V_{\text{Sp. B.}}^{3K} \text{Det} |\varphi_l(m)| f^2, \quad (44)$$

wo $f=f(r_{12}) f(r_{23}) f(r_{13})$, $f(r)=0$ bzw. 1 für $mr <$ bzw. $> 0,38$. Bei Vernachlässigung von Rückstoß- und Austauscheffekten erhalten wir mit

$$\begin{aligned} V_{\text{Sp. B.}}^{3K} &= (24/\pi) (f^2/4\pi)^3 (m/2M)^5 m \left\{ [x_{12}^{-1} (d/dx_{12}) (K_1(x_{12} + x_{23} + x_{13})/x_{12} x_{23} x_{13}) \mathfrak{x}_{12} + 2 \right. \\ &\quad \left. \geq 3, \mathfrak{p}_1] \cdot \vec{\sigma}_1 + \text{zykl.} \right\}; \\ &< V_{\text{Sp. B.}}^{3K} > = - (1/6) (\varrho/m^3)^2 32\pi^2 (24/\pi) (f^2/4\pi)^3 (m/2M)^5 m \\ &\quad \cdot \int_{x_c}^{\infty} dx \int_{x_c}^{\infty} dy |K_1(x+y+z)/z| z^{x+y} \max(x_c, |x-y|). \end{aligned} \quad (45)$$

Dies gibt mit $x_c = 0,38$ und $(f^2/4\pi) = 14$: $< V_{\text{Sp. B.}}^{3K} > = -7,8 \text{ MeV} \zeta^2 (\vec{l}_k, \vec{S}_k)$, (48)

während der entsprechende Ausdruck für das Zweikörperpotential lautet:

$$< V_{\text{Sp. B.}}^{2K} > = 1,5 \zeta (\vec{l}_k, \vec{S}_k) \int_{x_c}^{\infty} dx x^2 (m/2M)^2 (1/x) (d/dx) V_{\text{Sp. B.}}^4 = 9,8 \text{ MeV} \zeta (\vec{l}_k, \vec{S}_k).$$

Der Erwartungswert der Austauschterme wurde nicht berechnet. Es sollte nur gezeigt werden, daß die Dreikörperkraft einen Spin-Bahn-Beitrag mit dem richtigen Vorzeichen und in einer vernünftigen Größenordnung liefert. Es könnte also möglicherweise die Summation über alle Mehrkörperkräfte ungefähr zur richtigen Spin-Bahn-Kopplung füh-

ren, ohne daß man dafür die schwereren Mesonen heranziehen müßte.

Herrn Professor Heisenberg danke ich für sein förderndes Interesse und der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Ermöglichung meines Göttinger Aufenthaltes.

Nichtlokale Feldtheorie auf der Grundlage der Salpeter-Bethe-Gleichung

II. Wechselwirkung mit lokalisiertem Teilchen

Von H. L. JORDAN und W. E. FRAHN

Aus dem Institut für theoretische Physik und dem Physikalischen Institut der Technischen Hochschule Aachen

(Z. Naturforsch. 9a, 572—578 [1954]; eingegangen am 23. April 1954)

Im Anschluß an eine vorhergehende Arbeit¹ wird die Salpeter-Bethe-Gleichung für den Fall der Wechselwirkung mit einem lokalisierten schweren Teilchen behandelt. Es wird gezeigt, daß die Wechselwirkung bereits in zweiter störungstheoretischer Näherung nichtlokale Struktur besitzt. Am Beispiel des einfachsten irreduziblen Graphen vierter Ordnung wird die Wechselwirkungsfunktion explizit berechnet, ihre Raumzeitstruktur und der Übergang zu lokalen Potentialen in adiabatischer Näherung diskutiert.

In I wurde aus der Zweiteilchen-Salpeter-Bethe-Gleichung durch Reduktion auf das Einteilchenproblem eine verallgemeinerte Dirac-Gleichung gewonnen, welche die Bewegung eines „freien“ Teilchens bei Wechselwirkung mit einem nirgends lokalisierten und daher durch ebene Wellen darstellbaren Feld beschreibt. Die erhaltene Gleichung hat die Form der aus nichtlokalen Theorien freier Teilchen bekannten Verallgemeinerungen der Dirac-Gleichung.

¹ H. L. Jordan u. W. E. Frahn, Z. Naturforsch. 8a, 620 [1953], im folgenden mit I bezeichnet.

In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir in entsprechender Weise den Fall der Wechselwirkung eines Teilchens mit einem räumlich lokalisierten schweren Teilchen. Dabei zeigt sich, daß die Wechselwirkung nur in niedrigster Ordnung der Störungsrechnung (Leiter-Approximation) durch ein lokales Potential beschrieben wird, während die Terme höherer Ordnung nichtlokale Potentiale ergeben. Nach der Reduktion der Salpeter-Bethe-Gleichung (SBG) auf den Einteilchenfall (§ 1) werden die von einem lokalisierten schweren Teilchen herührenden Wechselwirkungsanteile niedrigster Ordnung berechnet (§ 2) und die Raum-Zeit-Struktur